熱拡散の場の量子論

学習院大・理・物理　江沢　洋
明治大・一般教養　中村孔一
明星大・理工・物理　渡辺敬二

1．序論

可逆な dynamics から出発して熱伝導や熱拡散などの非可逆性を導くことは理論物理学における重要な問題の一つである。量子力学的な系においては van Hove[1] が示したように，相互作用 potential λv が十分弱いとき，すなわち $|\lambda| \ll 1$ のとき $\lambda^2 t = \bar{t}$ が一定であるような十分長い時間を考えることにより master 方程式を出すことができた。場の量子論においてもこの van Hove limit をとるならば非可逆性を導く可能性があるかも知れない。熱拡散を例にとりこの問題を考えてみよう。

初期条件として時刻 $t = -T$ で系の温度を不均一にして放置する。この条件を実現するためには Ezawa の thermo field dynamics による手法[2]が便利である。温度が不均一な系の thermal state で流れの期待値を計算し，温度勾配により定まる方向に粒子が実際流れるかどうか，またその流れは古典的な拡散方程式にしたがうかを調べる。

拡散流が粒子密度 ρ の gradient, $\boldsymbol{j} = -D\nabla\rho$ で与えられるならば連続の方程式から拡散方程式が得られ，その Fourier 表示は $\rho(k) \sim s(k)/(k_0 + iD\boldsymbol{k}^2)$ のように拡散型の極 $k_0 = -iD\boldsymbol{k}^2$ をもつ。この k についての特異性を調べるためには，十分長い時間を考えているので，運動量表示の low momentum における振舞を調べれば十分である。粒子の流れの期待値に対する low momentum theorem として非可逆性または拡散型の特異性が得られるかどうかを考察するのが目的である。

相互作用をしている bose 粒子の系を考え，thermo field dynamics に基く Ezawa の方法を適用して粒子 current j_μ の期待値 $\langle j_\mu \rangle$ を計算する。このとき Ward-Takahashi の等式を用いて $\langle j_\mu(\vec{x}, t) \rangle$ の Fourier 成分が $k = 0$ で特異点を持つことが示される。$\langle j_\mu \rangle$ に対する近似解を BS 方程式を解くことにより求め k についての解析的な性質を調べ，粒子の流れは非可逆的であることを示す。しかし，実際に拡散型の特異点を出すためには van Hove limit 以外に粒子間の相互作用に対し更に条件をつける必要がある。

2. Thermo field dynamics

ある時刻に系の温度を不均一にする。$\beta=1/kT$ を $\beta\rightarrow\beta+\beta_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})\,(|\beta_{\mathrm{a}}|\ll 1)$ と変化させたとき thermo field dynamics における thermal state $|\beta>$ がどのように変換されるかを調べよう。Thermo field dynamics によると $|\beta>$は

$$|\beta>\,=\mathrm{e}^{iB[\beta]}\,|0>\otimes<0|$$

であらわされる。ここで $B[\beta]$ は thermal doublet $\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix}$ を用いて

$$B[\beta]=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\phi^{\dagger}\Big(X+\frac{\xi}{2}\Big)\tau_2\phi\Big(X-\frac{\xi}{2}\Big)\theta(\xi,\beta)\mathrm{d}^3\xi\,\mathrm{d}^3X\,, \tag{2.1}$$

$$\theta(\xi,\beta)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\theta(\vec{k},\beta)\mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{\xi}}\,\mathrm{d}^3k \tag{2.2}$$

と与えられる。θ は Bogoliubov 変換における角度で Bose 粒子の系に対しては

$$\sinh\,\theta(\vec{k},\beta)=(\mathrm{e}^{\beta\varepsilon_k}-1)^{-\frac{1}{2}},$$

$\varepsilon_k=\boldsymbol{k}^2/2m-\mu$ (m は粒子の質量，μ は chemical potential) となる。$\beta\rightarrow\hat{\beta}=\beta+\beta_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})$ とすると $\theta(\vec{\boldsymbol{k}},\beta)$ は $\dfrac{\partial\theta}{\partial\beta}\beta_{\mathrm{a}}(\boldsymbol{x})$ だけ増加するので thermal state は

$$|\hat{\beta}>\,=\mathrm{e}^{i(B[\beta]-\Gamma[\beta_{\mathrm{a}}])}\,|0>\otimes<0|$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}s\;\mathrm{e}^{iB[\beta]}\Gamma[\beta_{\mathrm{a}}]\mathrm{e}^{-iB[\beta]}\,|\beta>$$

に変換される。ここで $\Gamma[\beta_{\mathrm{a}}]$ は

$$\Gamma[\beta_{\mathrm{a}}]=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\phi^{\dagger}\Big(X+\frac{\xi}{2}\Big)\tau_2\phi\Big(X-\frac{\xi}{2}\Big)g(\xi,\beta)\beta_{\mathrm{a}}(X)\mathrm{d}^3X\mathrm{d}\xi$$

$$g(\xi,\beta)=-\frac{\partial}{\partial\beta}\,\theta(\xi,\beta)$$

である。系の温度を不均一にした時刻 $t=-T$ に粒子間の相互作用を入れると仮定し，相互作用表示を用いて $j_\mu(\vec{x},t)$ の期待値を計算する。$U(t,-T)$ を次の方程式から定まる unitary 演算子とする：

$$i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U(t,-T)=H_{\mathrm{I}}U(t,-T),\quad U(-T,-T)=I.$$

ここで H_{I} は相互作用 Hamiltonian である。相互作用を $t=T$ で切ったとき Gell-Mann Low の仮定が成立つものとする。すなわち

$$|\beta> = U(T,-T)|\beta>/<\beta|U(T,-T)|\beta>$$

を用いることにより j_μ の期待値 $<j_\mu(\vec{x},t)>$ は T-積で書くことができる。

$$<j_\mu(\vec{x},t)> = 2\mathrm{Im}\int_0^1 \mathrm{d}s<\beta|\mathrm{T}\{U(T,-T)j_\mu(\vec{x},t)\mathrm{e}^{iB[\beta]s}\Gamma[\beta_{\mathrm{a}}]\mathrm{e}^{-iB[\beta]s}\}|\beta>_{\mathrm{c}}$$

ここで添字 c は連結部分をとることを意味する。以下高温の系を考えることとし次の相互作用表示による表式を得る。

$$<j_\mu(\vec{x},t)> = 2\mathrm{Im}<\beta|\mathrm{T}\{U(T,-T)j_\mu(\vec{x},t)\Gamma[\beta_{\mathrm{a}}]\}|\beta>_{\mathrm{c}} \tag{2.3}$$

3. Interacting Bose System

質量 m の Bose 粒子が potential $v(\boldsymbol{r})$ により相互作用をしている系を考える。系の Hamiltonian $H=H_0+H_{\mathrm{I}}$ は

$$H_0=\int:\phi_1^\dagger(x)\left(-\frac{1}{2m}\Delta-\mu\right)\phi_1(x):\mathrm{d}^3x,$$

$$H_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\int:\phi_1^\dagger(x)\phi_1^\dagger(y)v(\vec{x}-\vec{y})\delta(x_0-y_0)\phi_1(y)\phi_1(x):\mathrm{d}^3x\mathrm{d}^3y,$$

粒子 current は

$$j_0(\vec{x},t)=\ :\phi_1^\dagger(\vec{x},t)\phi_1(\vec{x},t):$$

$$j_l(\vec{x},t)=\frac{1}{2im}\ :\phi_1^\dagger(x)\frac{\partial\phi_1(x)}{\partial x_l}-\frac{\partial\phi_1^\dagger(x)}{\partial x_l}\phi_1(x): \tag{3.1}$$

で与えられ，保存 current である。Hamiltonian や current などの物理的な量は thermal multiplet の第一成分 ϕ_1 だけで書かれていることを注意しておこう。

Vertex 関数 Λ_μ を次式により定義する

$$<\beta|\mathrm{T}\{U(T,-T)\phi_\alpha(x)\phi_\beta^\dagger(y)j_\mu(z)\}|\beta>$$

$$=\int \mathrm{d}u\mathrm{d}v\Delta_{\alpha\sigma}(x-u)\Lambda_\mu^{\sigma\sigma'}(u-z,\, z-v)\Delta_{\sigma'\beta}(v-y) \tag{3.2}$$

ここで $\Delta_{\alpha\sigma}$ は一体 Green 関数 $<\beta|\mathrm{T}\{U(T,-T)\phi_\alpha(x)\phi_\sigma^\dagger(y)\}|\beta>$ $(\alpha,\sigma=1,2)$ を表わす。(3.2) の vertex 関数を用いて (2.3) の拡散流は次式で表わされる。

$$<j_\mu(x)>=2\mathrm{Im}\int \mathrm{d}^3z\mathrm{d}^3\xi\beta_\mathrm{a}(\vec{z})g(\vec{\xi})$$

$$\times\int \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{Tr}\left[\tau_2\Delta\left(z-u-\frac{\xi}{2}\right)\Lambda_\mu\left(u-x,\, x-v\right)\Delta\left(v-z-\frac{\xi}{2}\right)\right] \tag{3.3}$$

ここで Trace は thermo field dynamics の成分についてとる。(3.3)を Fourier 表示で表わすと,

$$<j_\mu(x)>=-2\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{(2\pi)^8}\int \mathrm{d}^4p\mathrm{d}^4k\,\mathrm{e}^{ikx-ik_0T}\right.$$

$$\left.\times g(\vec{p})\beta_\mathrm{a}(\vec{k})\mathrm{Tr}\left[\tau_2\Delta\left(p-\frac{k}{2}\right)\Lambda_\mu(p,\, k)\Delta\left(p+\frac{k}{2}\right)\right]\right\} \tag{3.4}$$

となる。ここで $g(\vec{p})$, $\beta_\mathrm{a}(\vec{k})$ はそれぞれ $g(\xi,\beta)$ と $\beta_\mathrm{a}(\boldsymbol{x})$ の Fourier 変換である。$\Lambda_\mu(p,k)$ の近似解を求める前に一般的な性質を調べておこう。

4. Ward-Takahashi の等式と特異点

(3.1)の current は thermal doublet のうち ϕ_1 成分しか含まないので ϕ_α との同時刻交換関係は

$$[\phi_\alpha(x),\, j_0(z)]\delta(x_0-z_0)=\delta_{\alpha 1}\delta^4(x-z)\phi_\alpha(x)$$

$$[\phi_\alpha^\dagger(x),\, j_0(z)]\delta(x_0-z_0)=-\delta_{\alpha 1}\delta^4(x-z)\phi_\alpha^\dagger(x)$$

となる。Current 保存則とこの交換関係から Ward Takahashi の等式

$$\frac{\partial}{\partial z^\mu}<\beta|\mathrm{T}\{U(T,-T)\phi_\alpha(x)\phi_\beta^\dagger(y)j_\mu(z)\}|\beta>$$

$$= \delta_{\beta 1}\delta(y-z)<\beta|\mathrm{T}\{U(T,-T)\phi_\alpha(x)\phi_\beta^\dagger(y)\}|\beta>$$

$$-\delta_{\alpha 1}\delta(x-z)<\beta|\mathrm{T}\{U(T,-T)\phi_\alpha(x)\phi_\beta^\dagger(y)\}|\beta>$$

を得る。あるいは Fourier 表示であらわして

$$k_\mu \Lambda_\mu^{\beta\alpha}(p,k) = \delta_{\alpha 1}\left(\Delta^{-1}\left(p-\frac{k}{2}\right)\right)_{\beta\alpha} - \delta_{\beta 1}\left(\Delta^{-1}\left(p+\frac{k}{2}\right)\right)_{\beta\alpha} \tag{4.1}$$

が得られる。この関係式を各成分に対して書くと

$$k_\mu \Lambda_\mu^{11}(p,k) = \left(\Delta^{-1}\left(p-\frac{k}{2}\right)\right)_{11} - \left(\Delta^{-1}\left(p+\frac{k}{2}\right)\right)_{11} \tag{4.2a}$$

$$k_\mu \Lambda_\mu^{12}(p,k) = -\left(\Delta^{-1}\left(p+\frac{k}{2}\right)\right)_{12} \tag{4.2b}$$

$$k_\mu \Lambda_\mu^{21}(p,k) = \left(\Delta^{-1}\left(p-\frac{k}{2}\right)\right)_{21} \tag{4.2c}$$

$$k_\mu \Lambda_\mu^{22}(p,k) = 0 \tag{4.2d}$$

となる。$k\to 0$ の極限をとると(4.2b,c)から $\Lambda_\mu^{12}(p,k)$ と $\Lambda_\mu^{21}(p,k)$ は発散することが結論される。この $k=0$ における特異点がどのようなものかを次の section で BS 方程式を解くことにより調べる。

Self energy を $\Sigma(p)$ とすると

$$\Delta^{-1}(p) = (p_0 - \omega_p)\tau_3 + \Sigma(p)$$

なので Ward-Takahashi の等式は次式の形に書くことができる。

$$k_\mu \Lambda_\mu^{\beta\alpha}(p,k) = \left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}}{m} - k_0\right)\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 1}$$

$$+\delta_{\alpha 1}\left(\Sigma\left(p-\frac{k}{2}\right)\right)_{\beta\alpha} - \delta_{\beta 1}\left(\Sigma\left(p+\frac{k}{2}\right)\right)_{\beta\alpha} \tag{4.3}$$

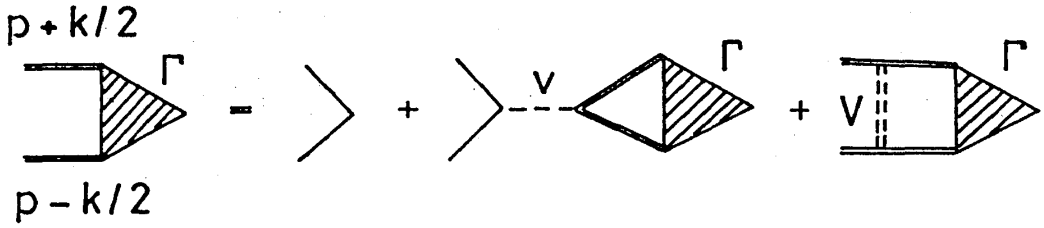

Fig. 1　Vertex 関数 Λ に対する BS 方程式

5. Vertex 関数に対する BS 方程式

図1に示したBS方程式の解を求めよう。図1に対応するBS方程式は

$$\Lambda_{\mu}^{\beta\alpha}(p, k) = \frac{\hat{p}_{\mu}}{m}\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 1} + \frac{i}{(2\pi)^4}\sum_{\lambda,\sigma}\int d^4q\,[(\tau_3)_{\beta\alpha}v(\vec{k}) + V_{\beta\alpha}(p-q)]$$

$$\times\,\Delta_{\beta\alpha}\left(q-\frac{k}{2}\right)\Lambda_{\mu}^{\lambda\sigma}(q, k)\,\Delta_{\sigma\alpha}\left(q+\frac{k}{2}\right) \tag{5.1}$$

となる。ここで

$$\hat{p}_{\mu} = \begin{cases} m & \mu=0 \\ p_l & \mu=l \end{cases},$$

$v(k)$ は粒子間の potential の Fourier 成分，$V_{\beta\alpha}$ は図2に示されたような補正された potential である。

(5.1)の vertex 関数に対し Ward-Takahashi の条件(4.1)を適用すると $\Sigma_{\alpha\beta}$ に対し次の表式を得る。

$$\Sigma_{\beta\alpha}(p) = -\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4q\;V_{\beta\alpha}(p-q)\Delta_{\beta\alpha}(q) \tag{5.2}$$

$$(\beta, \alpha) = (1, 2)\quad \text{または}\quad (2, 1)$$

$\alpha=\beta=1$ については(5.2)の条件をおく必要はなく，(4.2a)からは $\Sigma_{11}\left(p-\frac{k}{2}\right)$ と $\Sigma_{11}\left(p+\frac{k}{2}\right)$ の差に対する条件

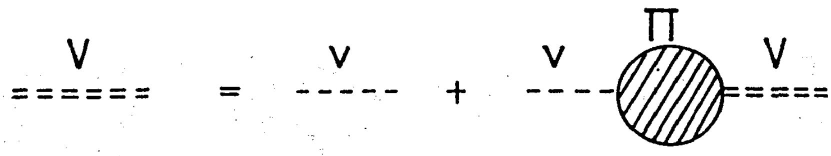

Fig. 2　補正された potential

$$\Sigma_{11}\left(p-\frac{k}{2}\right)-\Sigma_{11}\left(p+\frac{k}{2}\right)=\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4q\ \hat{V}_{11}(p-q,k)\left[\Delta_{11}\left(q+\frac{k}{2}\right)-\Delta_{11}\left(q-\frac{k}{2}\right)\right]$$

が得られる。ここで $\hat{V}_{\alpha\beta}=(\tau_3)_{\alpha\beta}\,v+V_{\alpha\beta}$ である。また Σ_{22} に対しては Ward-Takahashi の等式は何の条件も与えない。

$\Lambda_\mu^{\alpha\beta}$ は 2×2 行列なので Pauli 行列で展開して

$$\Lambda_\mu^{\alpha\beta}(p,k)=\frac{\hat{p}_\mu}{m}\left(\frac{\tau_0+\tau_3}{2}\right)_{\alpha\beta}+\sum_{a=0}^{3}B_\mu^a(p,k)(\tau_a)_{\alpha\beta} \tag{5.3}$$

と表わされる。また 2×2 行列

$$K_a^{\alpha\beta}(p,q,k)=\frac{i}{(2\pi)^4}\hat{V}_{\alpha\beta}(p-q,k)\left(\Delta\left(q-\frac{k}{2}\right)\tau_a\Delta\left(q+\frac{k}{2}\right)\right)_{\alpha\beta}$$

を用いて

$$\hat{M}_{ab}(p,q,k)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\tau_a,K_b(p,q,k)]$$

とすると，B_μ^a に対して次の積分方程式が得られる。

$$B_\mu^a(p,k)-\int d^4q\ \hat{M}_{ab}(p,q,k)B_\mu^b(q,k)=\hat{F}_\mu^a(p,k) \tag{5.4}$$

$$(a=0,1,2,3)$$

ここで

$$\hat{F}_\mu^a(p,k)=\frac{1}{2m}\int d^4q\ \hat{q}_\mu\{\hat{M}_{a0}(p,q,k)+\hat{M}_{a3}(p,q,k)\} \tag{5.5}$$

である。

6．$\hat{V}=\mathrm{const}$ の近似での Vertex 関数

Vertex 関数 $\Lambda_\mu(p, k)$ の $k\approx 0$ 附近での振舞を調べるために $\hat{V}_{\alpha\beta}=\mathrm{const}$ の近似を行うことにする。この近似により $K_a^{\alpha\beta}$, $\hat{M}_{ab}$, $\hat{F}_\mu^a$, B_μ は k のみの関数となるから(5.9)は代数方程式に帰着する。すなわち

$$M_{ab}(\vec{q}, k)=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}q_0\,\mathrm{Tr}[\tau_a K_b(q, k)]$$

$$F_\mu^a(k)=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3q\,\frac{\hat{q}_\mu}{m}\{M_{a0}(\vec{q}, k)+M_{a3}(\vec{q}, k)\}$$

を用いて

$$[\delta_{ab}-\int \mathrm{d}^3q M_{ab}(\vec{q}, k)]B_\mu^b(k)=F_\mu^a(k) \tag{6.1}$$

を得る。

(4.1)と(4.3)より

$$\delta_{\alpha 1}\Delta_{\beta\alpha}^{-1}\left(p-\frac{k}{2}\right)-\delta_{\beta 1}\Delta_{\beta\alpha}^{-1}\left(p+\frac{k}{2}\right)=\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 1}k_\mu\frac{p_\mu}{m}+(\delta_{\alpha 1}-\delta_{\beta 1})\Sigma_{\beta\alpha}$$

なる関係式が得られるが，この関係式と(5.2)より次の等式が成立つことに注意しておく。

$$\int \mathrm{d}^3q M_{a2}(\vec{q}, k)=\delta_{a2}-\frac{i}{\Sigma_{12}}k_\mu F_\mu^a \tag{6.2}$$

この式で $k\rightarrow 0$ の極限をとると $\int \mathrm{d}^3q M_{a2}(\vec{q}, 0)=\delta_{a2}$ となるので(6.1)の左辺の行列は $k\rightarrow 0$ の極限で行列式が 0 となり Ward Takahashi の等式から期待されたように B_μ は $k\rightarrow 0$ で特異点をもつことが分かる。

一体 Green 関数 $\Delta(p)$ を thermo field dynamics におけるスペクトル表示で表わし $M_{ab}(\vec{q}, k)$ を計算する。相互作用が弱く，k が小さい場合を考えているので，(6.1)において k_0, $\vec{k}^2$, v の最低次のみをとって BS 方程式(6.1)の解を求めると

$$B_i^0(k)=0$$

$$B_l^1(k) = -\frac{\Sigma_{12}(\xi+i\delta)\hat{D}k_0}{2\left[-\frac{1}{4}(\xi+i\delta)^2k_0^2 - i\gamma\Sigma_{12}\hat{D}\vec{k}^2+(\hat{D}\vec{k}^2)^2\right]}\cdot k_l$$

$$B_l^2(k) = \frac{i\Sigma_{12}\hat{D}(-i\Sigma_{12}\gamma+\hat{D}\vec{k}^2)}{\left[-\frac{1}{4}(\xi+i\delta)^2k_0^2 - i\gamma\Sigma_{12}\hat{D}\vec{k}^2+(\hat{D}\vec{k}^2)^2\right]}\cdot k_l$$

$$B_l^3(k) = 0 \tag{6.3a}$$

また,

$$B_0^0 = \frac{1}{2}[(\hat{V}_0+\hat{V}_3)\alpha - i\hat{V}_0\gamma]$$

$$B_0^1 = \frac{\Sigma_{12}\hat{D}(\xi+i\delta)\vec{k}^2}{2\left[-\frac{1}{4}(\xi+i\delta)^2k_0^2 - i\gamma\Sigma_{12}\hat{D}\vec{k}^2+(\hat{D}\vec{k}^2)^2\right]}$$

$$B_0^2 = \frac{-i\Sigma_{12}(\xi+i\delta)^2k_0}{4\left[-\frac{1}{4}(\xi+i\delta)^2k_0^2 - i\gamma\Sigma_{12}\hat{D}\vec{k}^2+(\hat{D}\vec{k}^2)^2\right]}$$

$$B_0^3 = \frac{1}{2}[(\hat{V}_0+\hat{V}_3)\alpha - i\hat{V}_3\gamma] \tag{6.3b}$$

となる。ここで B_μ^a に現われる parameter は $\Delta(p)$ のスペクトル関数 $\rho(\nu,\vec{q}^2)$ と分布関数 $d^2(\nu)=(\mathrm{e}^{B\nu}-1)^{-1}$, $c^2(\nu)=d^2(\nu)+1$ を用いて次式で与えられる。

$$\alpha = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3q\int \mathrm{d}\nu_1\mathrm{d}\nu_2\,\frac{c^2(\nu_1)d^2(\nu_2)-d^2(\nu_1)c^2(\nu_2)}{\nu_1-\nu_2}\,n_0(\nu_1,\,\nu_2,\,\vec{q}^2)$$

$$\xi = -\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3q\int \mathrm{d}\nu_1\mathrm{d}\nu_2\,\frac{c(\nu_1)d(\nu_2)-d(\nu_1)c(\nu_2)}{\nu_1-\nu_2}\,n_0(\nu_1,\,\nu_2,\,\vec{q}^2)$$

$$\gamma = \frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3q\int \mathrm{d}\nu\; c^2(\nu)d^2(\nu)n_0(\nu,\,\nu,\,\vec{q}^2)$$

$$\delta = \frac{2\pi}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3q\int \mathrm{d}\nu[c^2(\nu)+d^2(\nu)]c(\nu)d(\nu)n_0(\nu,\,\nu,\,\vec{q}^2)$$

$$n_0(\nu_1,\,\nu_2) = \rho(\nu_1,\,\vec{q}^2)\rho(\nu_2,\,\vec{q}^2)$$

である。また $\hat{D}$ は

$$\hat{D} = \frac{1}{6(2\pi)^3m}\int \mathrm{d}^3q\,\vec{q}^2\int \mathrm{d}\nu_1\mathrm{d}\nu_2\,\frac{c(\nu_1)d(\nu_1)+c(\nu_2)d(\nu_2)}{\nu_1-\nu_2}$$

$$\times\left[\rho(\nu_1,\vec{q}^2)\frac{\partial}{\partial\vec{q}^2}\rho(\nu_2,\vec{q}^2)-\rho(\nu_2,\vec{q}^2)\frac{\partial}{\partial\vec{q}^2}\rho(\nu_1,\vec{q}^2)\right]$$

となる。

(6.3)で与えられる解は $k=0$ で特異点を持つが次の二つの点で拡散型でない。一つは $\vec{k}^2$ に比例する項が分母に現われること，もう一つは k_0^2 の係数が複素数になることである。拡散型の特異点を出すためには更に近似する必要がある。

拡散流は(3.4)を用いて計算することができる。(6.3)の解を用いて

$$<j_l(x)>=\frac{16}{(2\pi)^7}\int d^3p\int d\nu\rho(\nu,\vec{p}^2)g(\vec{p})c(\nu)d(\nu)$$

$$\times\mathrm{Im}\left[\int d^4k\, e^{ikx-ik_0T}\beta_a(\vec{k})\frac{\hat{D}(\hat{D}\vec{k}^2-i\Sigma_{12}\gamma)k_l}{(\delta-i\xi)^2k_0^2-4i\gamma\Sigma_{12}\hat{D}\vec{k}^2+(2\hat{D}\vec{k}^2)^2}\right], \qquad (6.4a)$$

$$<j_0(x)>=-\frac{4}{(2\pi)^7}\int d^3p\int d\nu\rho(\nu,\vec{p}^2)g(\vec{p})c(\nu)d(\nu)$$

$$\times\mathrm{Im}\left[\int d^4k\, e^{ikx-ik_0T}\beta_a(\vec{k})\frac{(\delta-i\xi)^2k_0}{(\delta-i\xi)^2k_0^2-4i\gamma\Sigma_{12}\hat{D}\vec{k}^2+(2\hat{D}\vec{k}^2)^2}\right] \qquad (6.4b)$$

を得る。

(6.4)の右辺の被積分関数は k_j について複素数の極をもち，k_0 積分を複素積分に直し実行すると $t\to\infty$ で0となるような極だけが利くので非可逆性を出すことができる。

(6.4)において右辺の分母で $\vec{k}^2$ に比例する項は Σ_{12} が掛っており，これは v^2 に比例するので無視することができると仮定してみよう。もし $|\delta|\gg|\xi|$ とすることができるならば，

$$D=2|\hat{D}|/\delta$$

とおくことにより

$$<j_l(x)>=-D\frac{\partial}{\partial x_l}[<j_0(x)>] \qquad (6.5)$$

を得る。(6.4, a,b)で表わされる $<j_\mu(x)>$ は保存則をみたしているので拡散方程式を導くことができ，D は拡散係数と解釈される。

7．Discussion

Vertex 関数の 1，2 成分 $\Lambda_\mu^{12}(p, k)$ が $k=0$ で特異点を持つことは Ward-Takahashi の等式を用いることにより一般的に示すことができるが，その特異点が拡散型の極となるためには potential に更に条件をつける必要がある。§6 で求めた BS 方程式の解について述べると，補正された potential $V(q)$ が運動量の空間成分 $\vec{q}$ によらないことが必要である。すなわち粒子間の相互作用 potential $v(\boldsymbol{x})$ の拡がりは温度の de Broglie 波長 $\sqrt{\beta/3m}$ に較べて小さくなければならない。$V(q) \approx V(0)$ と近似することにより $\Lambda_\mu^{12}(p, k)$は p によらない極を持つことが示され，(6.4)において k_0 についての積分を複素積分にして実行すると $t \to \infty$ で 0 になる極だけが寄与するので $<j_\mu(x)>$ に対し非可逆性を導くことができる。

$\Lambda_\mu^{12}(p, k)$ の特異点はしかし拡散型の極にはならない。(6.4)の $<j_\mu(x)>$ に対する表式において v が十分小さいと仮定し v^2 に比例する Σ_{12} を無視すると $<j_\mu(x)>$ の Fourier 表示は $[(\delta-i\xi)k_0^2+(2\hat{D}\boldsymbol{k}^2)^2]^{-1}$ に比例する。このとき k_0 についての極は $k_0 = \pm 2i\hat{D}\boldsymbol{k}^2/(\delta-i\xi)$ となり実数部分をもつので粒子の流れは時間的に振動する。拡散方程式が導かれるためには更に $|\xi| \ll \delta$ でなければならない。これらの結果が BS 方程式に対する近似や補正された potential $V(q)$ の近似 $V(q) \approx V(0)$ と関連があるかどうか調べることが今後の課題である。

References

1) L. van Hove, Physica **21** (1955), 517; **23** (1956) 343.
2) H. Ezawa, *Progress in Quantum Field Theory* (1986) 305 (Elsevier Science Publishers B. V.)